Indépendance de l'hypothèse du continuum : une interprétation du multivers en théorie des catégories.

L'objectif de ce résumé est de montrer que la théorie des catégories admet une interprétation du multivers qui permet d'intégrer l'indépendance de l'hypothèse du continuum.

Actuellement, les questions de fondements des mathématiques restent abondamment étudiées. Elles génèrent une grande variété de débats comme celui concernant le rôle de la théorie des catégories comme alternative à la théorie des ensembles. La théorie des catégories est une théorie mathématique générale des structures et systèmes de structures. Elle constitue une théorie possible de fondements des mathématiques, mais elle n'est pas unanimement acceptée comme telle et cette question fait toujours l'objet d'une vive controverse.

Montrer que la théorie des catégories permet d'interpréter le multivers et ainsi d'intégrer l'indépendance de l'hypothèse du continuum au même titre que la théorie des ensembles constitue un argument supplémentaire en faveur de la théorie des catégories comme théorie possible de fondement des mathématiques.

La théorie des ensembles fournit un langage universel aux mathématiques car toutes les notions peuvent s'exprimer en termes d'ensemble. En théorie des ensembles, les fondements des mathématiques sont fournis par les axiomes de Zermelo-Fraenkel (ZF) avec comme élément central la relation d'appartenance. Les fondements des mathématiques en théorie des catégories s'expriment quant à eux en termes de topoi (ou plus exactement dans la théorie de premier ordre des topoi élémentaires). Ceux-ci peuvent être considérés comme une catégorie munie de bonnes propriétés, (comme le fait que les fonctions y admettent des limites finies). Lawvere et Tierney ont proposé une formulation des propriétés des ensembles dans la théorie des catégories. Le langage de Mitchell-Bénadou permet d'exprimer la relation d'appartenance dans la théorie des topoi et de décrire différents éléments de la théorie des catégories comme s'ils étaient des ensembles. Il donne à la théorie des topoi l'aspect d'une théorie des ensembles généralisée de sorte que les affirmations concernant les topoi et leurs propriétés peuvent s'exprimer dans la logique intuitionniste de premier ordre. La théorie des topoi qui résulte n'a pas la force complète de l'axiomatisation de la théorie des ensembles de ZF, mais elle peut être comparée à une version plus faible de la théorie des ensembles [MacLane and Moerdijk, p.331-332].

La plupart des spécialistes pensent que les mathématiques n'exigent pas des fondements uniques et définitifs et qu'un cadre de fondements logiquement plus faible que ZF suffit. En particulier, Lambek and Scott [1986] indiquent qu'il n'existe pas de topos « absolu » qui satisfasse un platoniste « classique » mais qu'un platoniste « modéré » peut accepter un topos booléen comme entité de base de fondement des mathématiques [Lambek, 1994].

Deux grandes interprétations des résultats d'indépendance en mathématiques existent : les points de vue pluraliste et platoniste. Les pluralistes pensent que ces résultats établissent l'existence des propositions indécidables du théorème de Gödel en montrant qu'elles n'ont pas de réponse. Par contre, les ``non-pluralistes'', proches des platonistes, pensent que l'indépendance pointe vers la pauvreté de nos moyens dans la découverte de la vérité mathématique [Koellner, 2016]. En théorie des ensembles, le multivers constitue une manière de fournir une assise au point de vue pluraliste. Selon ce point de vue, il n'existerait pas un univers unique de la théorie des ensembles mais plutôt un multivers de candidats possibles, certains étant préférables à d'autres pour certains buts mais aucun d'entre eux n'étant le « vrai » univers. En termes de multivers, une affirmation de la théorie des ensembles est vraie si elle est vraie dans tous les univers du multivers; une affirmation est indéterminée si elle n'est ni vraie ni fausse dans le multivers.

Pour Hamkins, seul le point de vue pluraliste est compatible avec une interprétation de l'indépendance de l'hypothèse du continuum. Celle-ci serait comme enracinée dans une conception en terme de multivers et ne peut par conséquent plus être décidée dans le cadre platoniste [Hamkins, 2012]. Shelah rejoint ce point de vue : pour lui, la conception platoniste suivant laquelle les problèmes en théorie des ensembles sont décidables et se réduisent à la simple découverte d'un axiome additionnel est caduque. Il considère qu'il existe plusieurs théories possibles des ensembles, toutes conformes à ZF [Shelah, 2003].

La contribution originale présentée ici montre comment un topos booléen, qui offre une possibilité de fondement des mathématiques en théorie des catégories, peut s'articuler avec une conception en termes de multivers. Le multivers y est présenté comme constitué d'une collection d'univers qui partagent tous une même structure donnée par le topos booléen qui en constitue l'essence.

Références :

Hamkins, J.: The set-theoretic multiverse, *Review of Symbolic Logic*, **5**, 416-449 , 2012.
Koellner, P. :The continuum hypothesis, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2016 Edition.
Lambek and Scott: *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
Lambek, J. : *Are traditional philosophies of mathematics really incompatible ?*, The Mathematical Intelligencer, **16**, 56-62, 1994.

MacLane, S. and I. Moerdijk: Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory, Springer-Verlag, New York Inc., 1992.
Shelah, S. : Logical dreams*, Bulletin of the American Mathematical Society*, **40**, 203-228, 2003.