La compréhension mathématique selon Poincaré : la topologie comme cas d’étude

A la suite de ce que l'on appelle le tournant pratique de la philosophie des mathématiques, une certaine tendance de cette discipline remet de façon insistante en cause la notion de justification qui était traditionnellement associée aux mathématiques, et qui confiait en quelque sorte cette dernière à la logique (confinant le rôle des aspects intuitifs de l'activité mathématique à sa seule dimension heuristique). Plusieurs auteurs insistent sur l'importance, sous cet aspect justificateur, du progrès de la *compréhension* mathématique ; importance dont témoigne par exemple le besoin ressenti par les mathématiciens de disposer de plusieurs démonstrations d'un même théorème. La notion de compréhension s’émancipe par là du seul domaine de la psychologie pour entrer dans le domaine de l’épistémologie, entendue au sens de théorie de la connaissance.

Certains propos de Poincaré incitent à faire remonter jusqu’à lui cette ligne de pensée, sans préjuger de toutes ses ramifications. Nous pouvons ici retenir Detlefsen et Heinzmann parmi ceux qui ont affirmé la pertinence d'une épistémologie inspirée de Poincaré pour saisir la nature des mathématiques, où l'intuition aurait un rôle à jouer non seulement pour l'invention mais aussi pour la justification des vérités mathématiques. S’appuyant sur un célèbre texte de *Science et méthode*, ils mettent en évidence un usage chez Poincaré du terme d'intuition comme faculté d'appréhender ce qu'on appelle des *architectures* mathématiques inaccessibles, en leur teneur propre, à la décomposition logique.

Nous aimerions prolonger ces réflexions en tentant de voir à l'œuvre cette intuition, ainsi définie, dans les travaux de Poincaré en Analysis situs. Cette branche des mathématiques représentait en effet pour Poincaré le lieu par excellence de l'exercice de l'intuition, théâtre de l'adoption d'un langage géométrique censé remplacer le langage analytique traitant des mêmes objets, selon ses propos introductifs au mémoire qu’il consacre à la topologie en 1895. Pourtant, si les intentions de Poincaré en posant de nombreuses pierres fondamentales cet édifice s'accordent bien avec cette grille de lecture, une difficulté se présente au lecteur de l’*Analysis situs* : nous pouvons la formuler de façon extérieure en nous souvenant que la postérité retiendra le nom de topologie *algébrique* pour désigner ce que Poincaré concevait comme une géométrie purement qualitative. Et la lecture du traité de Poincaré semble confirmer ce triomphe, contraire aux attentes, d'un formalisme algébrique dont l'exemple le plus frappant est peut-être l'analogie très forte entre l'écriture des homologies et les règles régissant les équations de l'algèbre ordinaire. Il en résulte un apparent recul de l'intuition géométrique , concomitant d'un lien de plus en plus lâche, semble-t-il, entre l'écriture algébrique et l'interprétation géométrique ; relâchement qui semble de surcroît aller s'accentuant suite aux critiques de Heegaard au sujet du célèbre théorème de dualité formulé dans le mémoire de 1895.

Ces constats nous conduisent à trois questions : 1) Dans quel mesure le formalisme algébrique développé par Poincaré peut-il servir de support à la conception ici analysée du travail de l'intuition selon Poincaré ? En d'autres termes, dans quelle mesure l'algèbre permet-elle de saisir les traits essentiels, les « architectures » mathématiques ? Nous mobiliseront pour répondre à cette question les analyses faites par Lakatos de la démonstration faite par Poincaré théorème d'Euler. 2) Quel statut la géométrie peut-elle revendiquer dans la topologie de Poincaré, dans la mesure où il semble difficile de la mettre en évidence au niveau du formalisme et du langage adoptés ? Notre hypothèse sera que l'aspect géométrique de l'œuvre est à chercher avant tout dans la construction et la sélection des objets étudiés, plus que dans les outils servant à les classifier. 3) Comment penser les rapports entre les points de vue algébrique et géométrique qui semblent coexister dans le même texte ? Nous essaierons de répondre à cette question en la mettant en relation avec celle du rôle du formalisme en mathématiques.