Logique intuitionniste avec négation forte, arbres de Beth et modèles minimaux discrets

Résumé

La logique intuitionniste (ou ses variantes plus fortes ou plus faibles) est aujourd'hui presque universellement reconnue comme étant la logique de la preuve. Dans le présent texte, nous étudions une logique plus forte que la logique intuitionniste (LI) : la logique intuitionniste avec négation forte (LINF) qui est une extension préservative de LI. En effet, tous les théorèmes de LI sont des théorèmes de LINF. Dans la deuxième section, nous allons d'abord présenter une axiomatisation à la Hilbert de LINF et discuter de la signification intuitive de la négation forte. Nous présentons brièvement le cadre canonique de Kripke pour cette axiomatisation, cadre basé sur l'ensemble des ensembles saturés déductivement clos, et affirmons que l'axiomatisation est fiable et complète pour ce cadre. Dans la troisième section, nous présentons un ensemble de règles de construction d'arbres de Beth pour vérifier la validité d'un énoncé quelconque de LINF. Nous montrons comment les arbres construisent des contre-modèles pour les énoncés non valides. Dans la quatrième et dernière section, nous introduisons la notion de modèle minimal et nous présentons une procédure pour définir des modèles canoniques minimaux à partir d'un arbre de Beth qui possède des chemins ouverts.

1. Une axiomatisation de LINF

Dans ce qui suit, le symbole $\sim$ représente la négation forte, F est un désignateur rigide de la fausseté et $\neg$ est la négation intuitionniste qui n'est pas un symbole primitif : $\neg A =_{df} A \supset F$.

Définition Soit A_{LI} une axiomatisation à la Hilbert standard de LI. On obtient A_{LINF} en ajoutant à A_{LI} les axiomes suivants :

$\sim\sim A \supset A$	$A \supset \sim\sim A$	$\sim (A \wedge B) \equiv (\sim A \vee \sim B)$
$\sim (A \vee B) \equiv (\sim A \wedge \sim B)$	$(A \wedge \sim A) \supset F)$	$\sim A \supset (A \supset B)$
$\sim (A \supset B) \equiv (A \wedge \sim B)$	$\neg \sim A \supset A$	

Définition On appelle ensemble saturé de formules (ESF) de LINF tout ensemble Γ de formules tel que : (1) si $(A \vee B) \in \Gamma$ alors $A \in \Gamma$ ou $B \in \Gamma$; (2) si $\Gamma \vdash A$, alors $A \in \Gamma$; (3) Γ est consistant. On appelle SAT l'ensemble des ESF.

Théorème $< SAT, \subseteq >$ est un cadre canonique de LINF, c'est-à-dire que (1) si A est un théorème de LINF, alors pour tout $\Gamma \in SAT$, $A \in \Gamma$; (2) si A est un non théorème de LIN, alors il existe un $\Gamma \in SAT$ tel que $A \notin \Gamma$.

Définition On dira que A est vraie dans le modèle $< SAT, \subseteq, \Gamma >$ ssi $A \in \Gamma$ On note $\models_{\Gamma} A$. On dira que A est fausse dans le modèle $< SAT, \subseteq, \Gamma >$ ssi $\sim A \in \Gamma$, c'est-à-dire ssi $\models_{\Gamma} \sim A$.

2. Arbres de Beth pour LINF

Les minuscules grecques représentent des mondes possibles. ? est un symbole métalinguistique : ${}^{\alpha}?A$ se lit « à α, A n'est pas démontrée » . (Voir *Logical Options*, Bell J.L., Devidi D., Solomon G., Peterborough, Broadview Press, 2001.)

$$\begin{array}{c} {}^{\alpha}(A \vee B) \\ {}^{\alpha}A \quad {}^{\alpha}B \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha}(A \wedge B) \\ {}^{\alpha}A \\ {}^{\alpha}B \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha}(A \supset B) \\ {}^{\alpha}?A \quad {}^{\alpha}B \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha}?(A \wedge B) \\ {}^{\alpha}?A \quad {}^{\alpha}?B \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha}?(A \vee B) \\ {}^{\alpha}?A \\ {}^{\alpha}?B \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha}?(A \supset B) \\ {}^{\beta}A \\ {}^{\beta}?B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} {}^{\alpha} \sim\sim A \\ {}^{\alpha}A \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha} \sim A \\ {}^{\alpha}?A \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha} \sim \neg A \\ {}^{\alpha}A \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha}? \sim\sim A \\ {}^{\alpha}?A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} {}^{\alpha} \sim (A \supset B) \\ {}^{\alpha}A \\ {}^{\alpha} \sim B \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha} \sim (A \vee B) \\ {}^{\alpha} \sim A \\ {}^{\alpha} \sim B \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}^{\alpha} \sim (A \wedge B) \\ {}^{\alpha} \sim A \quad {}^{\alpha} \sim B \end{array}$$

Une branche ferme si elle contient un monde possible α pour lequel on a simultanément A et $?A$.
Règle spéciale : Si un noeud α contient ${}^{\alpha}?(A \supset B)$ et ${}^{\alpha}?(C \supset D)$, on a la règle suivante :

$$\begin{array}{ll} {}^{\alpha}?(A \supset B) & \\ {}^{\alpha}?(C \supset D) & \\ {}^{\beta}A & {}^{\gamma}C \\ {}^{\beta}?B & {}^{\gamma}?D \end{array}$$

Si l'une au moins des deux branches ferme, l'arbre ferme. Pour prouver qu'une formule A n'est pas un théorème, on construit l'arbre de $?A$: les chemins ouverts nous donnent des contre-modèles de A.

3. Arbres de Beth et modèles minimaux

Théorème Soit $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...$ un contre-modèle de A donné par un arbre de Beth. Il existe un Γ' tel que $A \in \Gamma'$ et $\Gamma' \in SAT$.

Autrement dit, il existe un contre-modèle canonique. En fait, tout $\Delta \in SAT$ tel que $A \notin \Delta$ est un candidat. Peut-on trouver les minimaux, ceux qui n'en contiennent pas de plus petits ? Nous présentons une méthode pour les définir. Nous généralisons ensuite aux ensembles d'énoncés consistants. Finalement, une généralisation au calcul des prédicats intuitionniste avec négation forte est suggérée et nous concluons que tout ensemble de formules du premier ordre qui admet un modèle, admet un modèle canonique minimal et donc discret.